TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
2º Teste (Versão A)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

6 de Junho de 2016

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4) 1. Considere uma função $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(x, y) = (x - y, x + 2y + e^{x^2-y^2})$. Mostre que:

a) Existe um aberto U contendo $(0, 0)$ onde ψ é injectiva.

b) Designando a inversa da restrição de ψ a U por ϕ, calcule a matriz jacobiana $J_\phi(0, 1)$.

(4) 2. Calcule, usando coordenadas polares,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \iint_{A_\epsilon} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/4}}\, dx\, dy$$

em que $A_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \epsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ com $\epsilon > 0$.

(4) 3. Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y^3, \frac{x^3}{2} \leq y \leq x\}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Aplique a mudança de variável

$$\begin{cases} u = x^3/y \\ v = y^3/x \end{cases}$$

para transformar o integral

$$\iint_B x^3 y^3 f(x^2 y^2)\, dx\, dy$$

num integral de uma função adequada num triângulo em $\mathbb{R}^2$.

(3) 4. Calcule $\int_L \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2+1}$ em que L é uma linha descrita por um caminho C^1 unindo $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

(3) 5. Decida se o conjunto V definido por

$$\begin{cases} z = (x + y)^2 + (x - y)^2, \\ z = 1 - x^2 - 4y^2. \end{cases}$$

é ou não uma variedade diferenciável e, na afirmativa, determine a sua dimensão e o respectivo espaço tangente em $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

(2) 6. Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu\, dS$$

em que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

ν é a respectiva normal unitária contínua verificando $\nu(x, y, z) \cdot (x, y, z) > 0$ para todo o $(x, y, z) \in S$ e $F(x, y, z) = (xe^{yz}, ye^{xz}, z(1 + xy))$.