

Cálculo Diferencial e Integral II

1º Teste (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

13 de Abril de 2019

Justifique adequadamente todas as respostas.

- (3,0) 1. a) Calcule o volume de $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{1-y}, x+z \leq 1, x \in [0, 1], y \geq 0\}$.
b) Justifique que se pode inverter a ordem de integração para calcular

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \operatorname{sen} \left(\frac{y}{t} \right) dt \right) dy$$

e obtenha o valor do integral.

- (3,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de \mathbb{R}^2 por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y+x}}{\log \left(1 + \sqrt{1-x^2-y^2} \right)}$$

- a) Determine o domínio D de f .
b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e \overline{D} e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

- (4,0) 3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5}{x^4 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a) Decida se h é ou não contínua em $(0, 0)$.
b) Decida se h é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

- (4,0) 4. Considere funções $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = F(x \operatorname{sen} y, x \cos y).$$

Calcule, em termos de derivadas parciais adequadas de F :

- a) A derivada dirigida $D_{(1,-1)}G \left(1, \frac{\pi}{2} \right)$.
b) $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \left(1, \frac{\pi}{2} \right)$.

- (2,0) 5. Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+1} \operatorname{sen}((t+1)x) dt.$$

Justifique que ψ é diferenciável e calcule $\psi'(0)$.

- (4,0) 6. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = e^{x^2+y^2} - 8xy - x^4$.

- a) Decida se $(0, 0)$ é um ponto de máximo local, um ponto de mínimo local, ou um ponto de sela de g .
b) Mostre que g possui um ponto de mínimo absoluto.