

Cálculo Diferencial e Integral II

1º Teste (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

22 de Abril de 2017

Justifique adequadamente todas as respostas.

- (3,0) 1. Mude a ordem de integração de

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 y^4 e^{xy^2} dy \right) dx$$

e use a expressão assim obtida para calcular o seu valor.

- (3,0) 2. Calcule o volume da região $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1/4, 0 \leq y, z \geq x+y, x+y+z \leq 1\}$.

- (4,0) 3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

[**Sugestão:** Relembre que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \log \lambda = 0$.]

- a) Mostre que h é contínua em $(0, 0)$.
b) Decida se h é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

- (4,0) 4. Considere funções $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = F(2xy, x^2 + y^2).$$

- a) Calcule $D_{(-1,1)}G(1, 1)$.
b) Exprima $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(1, 1)$ em termos de derivadas parciais de F adequadas.

- (4,0) 5. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = y^3 - x^2 - xy^2 - 4x$.

- a) Mostre que g possui um único ponto de estacionaridade.
b) Classifique o ponto de estacionaridade de g relativo a ser ou não um ponto de extremo local.

- (2,0) 6. Determine o contradomínio da função ψ definida por $\psi(x, y) = \sqrt{\arctg(4x^2 + y^2)}$, e identifique e classifique os seus pontos de extremo se existirem.