TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
1º Teste (Versão A)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

21 de Abril de 2018

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4,0) 1. a) Seja $V = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3 : 1 - x - y \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Exprima o integral

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

na forma de um integral iterado $\int_*^* \left(\int_*^* \left(\int_*^* f(x, y, z)\, dy\right) dx\right) dz$.

b) Troque a ordem de integração de

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 y^5 \operatorname{sen}(xy^2)\, dy\right) dx$$

e use a expressão assim obtida para calcular o valor do integral.

(3,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x + y}}{x + y}$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e $\overline{D}$ e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

c) Decida se f é ou não prolongável por continuidade a $(0, 0)$.

(4,0) 3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}}, & \text{se } x \neq 0 \text{ ou } \operatorname{sen} y \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Mostre que h é contínua em $(0, 0)$.

b) Decida se h é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

(4,0) 4. Considere funções $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y, z) = F(xy, x^2 + y^2, y^2 - z^2).$$

a) Calcule a derivada dirigida $D_{(1,-1,1)}G(0, 0, 1)$.

b) Exprima $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(0, 0, 1)$ em termos de derivadas parciais de F adequadas.

(3,0) 5. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 2e^{x^2+y^2} - x^2 - y^4$.

a) Mostre que g possui um único ponto de estacionaridade em $(0, 0)$.

b) Decida se $(0, 0)$ é um ponto de máximo local, um ponto de mínimo local, ou um ponto de sela de g.

(2,0) 6. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função **contínua** e seja G a função definida por

$$G(x, y) = F(e^{x-y} + x^2, e^{x+y} + y^2).$$

Mostre que F tem um mínimo local em $(1, 1)$ se e só se G tem um mínimo local em $(0, 0)$.