TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
1º Teste (Versão A)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

11 de Abril de 2015

Justifique adequadamente todas as respostas.

(5,0) 1. Seja $V = \{(x,y,z) \in [-1,1]\times[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2,\ 0 \le y \le x^2 \le 1\}$ e $g : [-1,1]\times[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

a) Exprima o integral $\iiint_V g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ como um integral integrado triplo ou soma de integrais iterados triplos por uma ordem de integração à sua escolha.

b) Determine o valor de $\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$.

(4,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^3$ por

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{z}}$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e $\overline{D}$ e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

c) Decida se f é ou não prolongável por continuidade a $(0,0,0)$.

d) Decida se f é ou não uma função limitada.

(4,0) 3. Considere funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $G(x,y) = F(x-y^2, x^2-y)$.

a) Relacione $\nabla G(1,1)$ e $\nabla F(0,0)$ e aproveite para mostrar que $\nabla G(1,1) \neq (0,0)$ se e só se $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$.

b) Exprima $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(1,1)$ em termos de derivadas parciais de F adequadas.

(3,0) 4. Decida se a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = e^{(x-1)^2+(y-1)^2} + (x-1)(y-1) + (x-1)^3$ tem ou não um ponto de extremo local em $(1,1)$.

(4,0) 5. Considere a uma função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2+4y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Decida se h é ou não diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

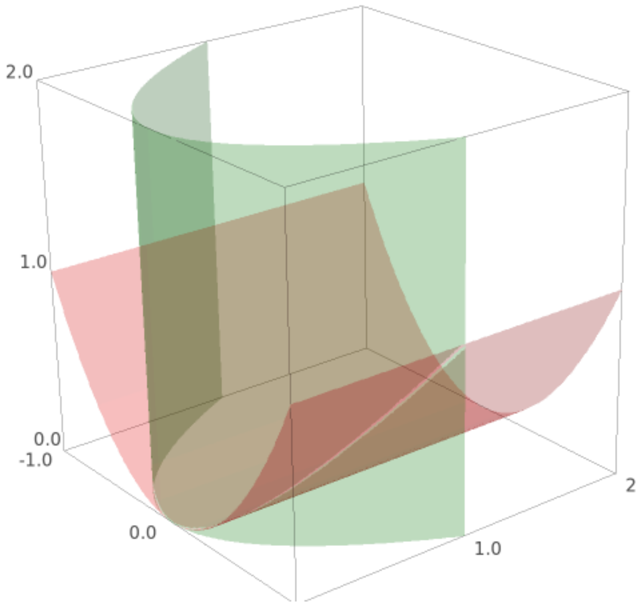
b) Justifique que o contradomínio da restrição de h a uma qualquer bola fechada centrada em $(0,0)$ é um intervalo da forma $[0,\alpha]$ com $\alpha \in \,]0,1]$.

Solução

(5,0) 1. Seja $V = \{(x,y,z) \in [-1,1]\times[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2,\ 0 \le y \le x^2 \le 1\}$ e $g : [-1,1]\times[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

a) Exprima o integral $\iiint_V g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ como um integral integrado triplo ou soma de integrais iterados triplos por uma ordem de integração à sua escolha.

$$\begin{aligned}\iiint_V g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x^2\le 1\}} \left(\int_0^{x^2} g(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{x^2}\left(\int_0^{x^2} g(x,y,z)\,dz\right) dy\right) dx\end{aligned}$$



b) Determine o valor de $\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$.

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{x^2}\left(\int_0^{x^2} x\,dz\right) dy\right) dx = 0$$

visto a função

$$[-1,1] \ni x \mapsto \int_0^{x^2}\left(\int_0^{x^2} x\,dz\right) dy$$

ser uma função ímpar.

(4,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^3$ por

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{z}}$$

a) Determine o domínio D de f.

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z > 0\}.$$

b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e $\overline{D}$ e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

$$\begin{aligned}\operatorname{int} D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z > 0\},\\ \partial D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \ge 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = 0\},\\ \overline{D} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z \ge 0\}\end{aligned}$$

Como $\operatorname{int} D \neq D$ D não é aberto.
Como $\overline{D} \neq D$ D não é fechado.
Como D é convexo (é um cilindro de raio 1 tendo como eixo o eixo dos zs limitado inferiormente pelo plano $z = 0$ e não incluindo este) é em particular conexo.
Como todos os pontos da forma $(0,0,k)$ com $k \in \mathbb{N}$ pertencem a D, D não é um conjunto limitado.

c) Decida se f é ou não prolongável por continuidade a $(0,0,0)$.

Como $\lim_{z \to 0} f(0,0,z) = +\infty$ concluímos que não é possível prolongar por continuidade f ao ponto $(0,0,0)$.

d) Decida se f é ou não uma função limitada.

O limite calculado na alínea anterior também mostra que f não é limitada.

(4,0) 3. Considere funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $G(x,y) = F(x - y^2, x^2 - y)$.

a) Relacione $\nabla G(1,1)$ e $\nabla F(0,0)$ e aproveite para mostrar que $\nabla G(1,1) \neq (0,0)$ se e só se $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$.

Como a aplicação $(x,y) \mapsto (x - y^2, x^2 - y)$ tem funções coordenadas polinomiais, trata-se de uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ o que torna possível usar o teorema de derivação da função composta para calcular derivadas parciais de primeira e segunda ordem de G em termos de derivadas parciais de primeira e segunda ordem de F. Assim

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) &= D_1F(x - y^2, x^2 - y)\frac{\partial (x - y^2)}{\partial x} + D_2F(x - y^2, x^2 - y)\frac{\partial (x^2 - y)}{\partial x}\\ &= D_1F(x - y^2, x^2 - y) + D_2F(x - y^2, x^2 - y)2x,\\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) &= D_1F(x - y^2, x^2 - y)\frac{\partial (x - y^2)}{\partial y} + D_2F(x - y^2, x^2 - y)\frac{\partial (x^2 - y)}{\partial y}\\ &= -D_1F(x - y^2, x^2 - y)2y - D_2F(x - y^2, x^2 - y).\end{aligned}$$

Particularizando para $(x,y) = (1,1)$ obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x}(1,1) &= D_1F(0,0) + 2D_2F(0,0),\\ \frac{\partial G}{\partial y}(1,1) &= -2D_1F(0,0) - D_2F(0,0).\end{aligned}$$

As igualdades anteriores formam um sistema relacionando linearmente o gradiente de G em $(1,1)$ com o gradiente de F em $(0,0)$. Como o determinante da matriz definindo esta aplicação linear não é nulo (é 5), o gradiente de F em $(0,0)$ é nulo se e só se o gradiente de G em $(1,1)$ é não nulo.

b) Exprima $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(1,1)$ em termos de derivadas parciais de F adequadas.

Prosseguindo os cálculos da alínea anterior

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\big(-D_1F(x-y^2,x^2-y)2y - D_2F(x-y^2,x^2-y)\big) \\
&= -D_{11}F(x-y^2,x^2-y)2y - D_{21}F(x-y^2,x^2-y)4xy \\
&\quad - D_{12}F(x-y^2,x^2-y) - D_{22}F(x-y^2,x^2-y)2x
\end{aligned}
$$

donde

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(1,1) = -2D_{11}F(0,0) - 5D_{12}F(0,0)4xy - 2D_{22}F(0,0)$$

[Note que na última expressão usou-se a igualdade das derivadas cruzadas de F.]

(3,0) 4. Decida se a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = e^{(x-1)^2+(y-1)^2} + (x-1)(y-1) + (x-1)^3$ tem ou não um ponto de extremo local em $(1,1)$.

As derivadas parciais de primeira ordem de h são

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= 2(x-1)e^{(x-1)^2+(y-1)^2} + y - 1 + 3(x-1)^2, \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= 2(y-1)e^{(x-1)^2+(y-1)^2} + x - 1.
\end{aligned}
$$

donde

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = 0$$

isto é, $(1,1)$ é um ponto de estacionaridade de h.

Calculando derivadas parciais de segunda ordem obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 4(x-1)^2e^{(x-1)^2+(y-1)^2} + 2e^{(x-1)^2+(y-1)^2} + 6(x-1) \\
\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= 4(x-1)(y-1)e^{(x-1)^2+(y-1)^2} + 1 \\
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= 4(y-1)^2e^{(x-1)^2+(y-1)^2} + 2e^{(x-1)^2+(y-1)^2}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,1) &= 2 \\
\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1,1) &= 1 \\
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(1,1) &= 2
\end{aligned}
$$

donde a matriz hessiana de h no ponto $(1,1)$ é

$$H_h(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que define uma forma quadrática definida positiva (note que o determinante da matriz é $3 > 0$ pelo que os valores próprios são não nulos e têm o mesmo sinal e que o respectivo traço é $4 > 0$ pelo que os valores próprios são positivos). Daí que o termo de segunda ordem da fórmula de Taylor de h relativamente ao ponto $(1,1)$ é uma forma quadrática definida positiva e $(1,1)$ é um ponto de mínimo local.

[Da forma que a pergunta estava formulada bastava reconhecer que se trata de um ponto de extremo local à custa do sinal do determinante da matriz hessiana. Acima optou-se por indicar o pouco mais que é preciso para decidir que se trata de um ponto de mínimo local.]

(4,0) 5. Considere a uma função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2+4y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Decida se h é ou não diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

No complementar da origem podemos dar à função a forma de um produto de uma função racional (diferenciável) pela função $(x,y) \mapsto \operatorname{sen}^2 y$. Esta última função pode exprimir-se como o quadrado de $\operatorname{sen} y$ que pelo teorema de derivação da função composta, diferenciabilidade do quadrado, diferenciabilidade do sen e diferenciabilidade da aplicação linear $(x,y) \mapsto y$ também se reconhece como diferenciável. Pela diferenciabilidade do produto concluímos da diferenciabilidade da função no complementar da origem.

Para estudar a diferenciabilidade em $(0,0)$ notamos que h é identicamente 0 sobre os eixos coordenados pelo que as suas derivadas parciais em $(0,0)$ são ambas nulas. Assim, para estudar a diferenciabilidade em $(0,0)$ basta estudar o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{(x^2+4y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

para verificar se existe e é 0 ou não.

Notando que, para todo o $y \in \mathbb{R}$, temos $|\operatorname{sen} y| \leq |y|$, e, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos $x^2 + 4y^2 \geq x^2 + y^2$, $x^2 \leq x^2 + y^2$ e $y^2 \leq x^2 + y^2$, obtemos a estimativa

$$0 \leq \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{(x^2+4y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

pelo que dado $\epsilon > 0$ podemos garantir que $\frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{(x^2+4y^2)\sqrt{x^2+y^2}} < \epsilon$ se $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$, isto é o limite é 0 e a função diferenciável.

b) Justifique que o contradomínio da restrição de h a uma qualquer bola fechada centrada em $(0,0)$ é um intervalo da forma $[0,\alpha]$ com $\alpha \in]0,1]$.

Uma bola fechada é um conjunto convexo, logo conexo, e é um conjunto limitado e fechado. Como h é contínua em $\mathbb{R}^2$, os teoremas do valor intermédio e de Weierstrass garantem que o contradomínio será um conexo limitado e fechado de $\mathbb{R}$, logo um intervalo limitado e fechado. Como

$$0 \leq h(x,y) \leq \frac{x^2}{x^2+4y^2} \leq 1$$

e $h(0,0) = 0$, o contradomínio será um intervalo da forma indicada.