TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
Repetição de Testes e Exame (Versão B)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

7 de Julho de 2021

Para resolver um teste considere a secção respectiva e entregue-a até 1h 30m após o início da prova. Qualquer prova entregue depois desse momento é considerada um exame.

Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

(2) 1. a) Calcule, usando mudança de ordem de integração,

$$\int_0^{1/2}\left(\int_0^1 (x^2+1)e^{y(x^2+1)}\,dx\right)dy+\int_{1/2}^1\left(\int_0^{\sqrt{\frac{1}{y}-1}}(x^2+1)e^{y(x^2+1)}\,dx\right)dy.$$

b) Calcule o volume de $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y+x^2\le z\le \frac{y+1}{2}+\frac{x^2}{2}, y\ge 0\right\}$.

(2) 2. Decida se a função $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x,y)=\begin{cases}\frac{x\operatorname{arctg}(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

é ou não:

a) contínua em $(0,0)$.

b) diferenciável em $(0,0)$.

(2) 3. Seja $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e considere uma função definida por $F(x,y)=G(\log x\log y, xy)$.

a) Exprima ∇F em termos de ∇G.

b) Exprima $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(1,1)$ em termos de derivadas parciais adequadas de G.

(3) 4. Considere a função $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $h(x,y)=e^{xy}(1-x^2-y^2)$.

a) Obtenha a expressão da derivada dirigida $D_{(-x,y)}h(x,y)$.

b) Use o cálculo da alínea anterior para mostrar que se (a,b) é um ponto de estacionaridade de h então $|a|=|b|$.

c) Determine todos os pontos de estacionaridade de h.

d) Decida se h possui ou não um máximo absoluto e, se optar pela afirmativa, determine o seu valor e onde ocorre.

e) Determine o contradomínio de h.

(1) 5. Determine um polinómio $p(x,y)$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(y+2xy)-p(x,y)}{x^2+y^2}=0.$$

2º Teste

(2) 6. Considere o sistema

$$\begin{cases} w - z = x - y + e^{xy} \\ w + z = x + y + \cos(xy). \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema define (x, y) como função de (z, w), numa vizinhança de $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 1)$.

b) Calcule $\frac{\partial y}{\partial z}(0, 1)$.

(2) 7. Calcule a área da superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq y, x \geq 0\}$.

(2) 8. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{4}\}$. Calcule o valor de

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$$

(2) 9. Considere o integral de linha

$$\int_L \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

em que L é definida por $\alpha(t) = \begin{cases} (-1, -t), \text{se } t \in [0, 1], \\ (-2 + t, -1), \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases}$.

a) Calcule o valor do integral.

b) Decida se é possível, substituindo o caminho por outro com o mesmo início e o mesmo fim, obter um valor distinto para o integral.

(2) 10. Seja $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (y(z^2 - 3), x(z^2 - 3), xyz)$$

e considere a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \geq 1\right\}.$$

Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

em que ν designa a normal unitária contínua sobre S tal que $\nu(2, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) > 0$.