

Cálculo Diferencial e Integral II

Repetição de Testes e Exame (Versão B)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

3 de Julho de 2017

Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

- (3) 1. Mude a ordem de integração para calcular

$$\int_0^1 \left(\int_{x/2}^x e^{y^2} dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{x/2}^1 e^{y^2} dy \right) dx.$$

- (4) 2. Determine o volume de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 - z, z \geq y - 1, y \geq 0, z \geq 0\}$.

- (4) 3. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3(x-y)}{x^2+(x-y)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Decida se g é diferenciável em $(0, 0)$.

- (4) 4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável e considere uma função $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\psi(u, v, w) = F(u + v^2, u^2 + v + w^2, w + u^2)$. Relacione o determinante da matriz jacobiana de ψ no ponto $(0, 0, 1)$, $\det J_\psi(0, 0, 1)$, com o determinante da matriz jacobiana de F , $\det J_F$, calculado num ponto apropriado.

- (3) 5. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{x^2+y^2}(x-1)(y-1)$. Estude f quanto a existência e tipo de pontos de extremo local.

- (2) 6. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $h(0) = 1$ e é nula numa vizinhança de 1. Mostre que a função $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = \int_{x^2+y^2}^{xy+x+y+1} h(t) dt$$

possui um máximo local em $(0, 0)$.

2º Teste

- (3) 7. a) Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x = u - v + e^{uv} \\ y = u + v + \log(uv + 1) \end{cases}$$

define (u, v) como uma função $T \in C^1$ de (x, y) verificando $T(1, 0) = (0, 0)$ para (u, v) numa vizinhança suficientemente pequena de $(0, 0)$.

- b) Considerando $(u, v) = T(x, y)$, calcule $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 0)$.

- (3) 8. Calcule a área da superfície em \mathbb{R}^3 definida por $1 \leq y = \sqrt{x^2 + z^2} \leq 3$.

- (4) 9. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x + y + z = 2\}$.

- a) Justifique que M é uma variedade diferenciável e determine a sua dimensão.
b) Determine $T_M(0, 1, 1)$, o espaço tangente a M no ponto $(0, 1, 1)$.
c) Determine o ponto de M com maior coordenada z .

- (3) 10. Calcule o volume da região de \mathbb{R}^3 definida por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{1/4} \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}, |x| \leq y\}.$$

- (4) 11. a) Calcule

$$\int_L \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$$

em que L é semicircunferência de centro em $(0, 0)$, contida no semiplano definido por $x \geq 0$, e unindo $(0, -1)$ a $(0, 1)$.

- b) Decida se o integral da alínea anterior tem o mesmo valor qualquer que seja a linha L de classe C^1 unindo aqueles dois pontos no mesmo sentido e contida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- (3) 12. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (y, -x, xyz)$ e considere a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \operatorname{sen} \left(\pi \sqrt{x^2 + y^2} \right), 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2, x > 0, y > 0 \right\}.$$

Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

em que ν designa a normal unitária contínua a S tal que $\nu \cdot (0, 0, 1) > 0$ nos pontos de S .