

Cálculo Diferencial e Integral II

Repetição de Testes e Exame (Versão A)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

7 de Julho de 2021

Para resolver um teste considere a secção respectiva e entregue-a até 1h 30m após o início da prova. Qualquer prova entregue depois desse momento é considerada um exame.

Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

- (2) 1. a) Calcule, usando mudança de ordem de integração,

$$\int_0^{1/2} \left(\int_0^1 (y^2 + 1)e^{x(y^2+1)} dy \right) dx + \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{1}{x}-1}} (y^2 + 1)e^{x(y^2+1)} dy \right) dx.$$

- b) Calcule o volume de $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 \leq z \leq \frac{x+1}{2} + \frac{y^2}{2}, x \geq 0 \right\}$.

- (2) 2. Decida se a função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{y \operatorname{arctg}(x)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é ou não:

- a) contínua em $(0, 0)$.
b) diferenciável em $(0, 0)$.

- (2) 3. Seja $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e considere uma função definida por $F(x, y) = G(xy, \log x \log y)$.

- a) Exprima ∇F em termos de ∇G .
b) Exprima $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1, 1)$ em termos de derivadas parciais adequadas de G .

- (3) 4. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = e^{xy}(1 - x^2 - y^2)$.

- a) Obtenha a expressão da derivada dirigida $D_{(-x,y)}h(x, y)$.
b) Use o cálculo da alínea anterior para mostrar que se (a, b) é um ponto de estacionaridade de h então $|a| = |b|$.
c) Determine todos os pontos de estacionaridade de h .
d) Decida se h possui ou não um máximo absoluto e, se optar pela afirmativa, determine o seu valor e onde ocorre.
e) Determine o contradomínio de h .

- (1) 5. Determine um polinómio $p(x, y)$ tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x + 2xy) - p(x, y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

2º Teste

(2) 6. Considere o sistema

$$\begin{cases} z - w = x - y + e^{xy} \\ z + w = x + y + \cos(xy). \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema define (x, y) como função de (z, w) , numa vizinhança de $(x, y, z, w) = (0, 0, 1, 0)$.

b) Calcule $\frac{\partial y}{\partial z}(1, 0)$.

(2) 7. Calcule a área da superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq x, y \geq 0\}$.

(2) 8. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{x^2 + y^2}{4}\}$. Calcule o valor de

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$$

(2) 9. Considere o integral de linha

$$\int_L \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

em que L é definida por $\alpha(t) = \begin{cases} (1, t), & \text{se } t \in [0, 1], \\ (2 - t, 1), & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases}$

a) Calcule o valor do integral.

b) Decida se é possível, substituindo o caminho por outro com o mesmo início e o mesmo fim, obter um valor distinto para o integral.

(2) 10. Seja $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (y(z^2 - 3), x(z^2 - 3), xyz)$$

e considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Calcule

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS$$

em que ν designa a normal unitária contínua sobre S tal que $\nu(2, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) > 0$.