TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
Repetição de Testes e Exame (Versão A)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

3 de Julho de 2017

Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

(3) 1. Mude a ordem de integração para calcular

$$\int_0^1 \left(\int_{y/2}^{y} e^{x^2}\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{y/2}^{1} e^{x^2}\, dx \right) dy.$$

(4) 2. Determine o volume de $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1 - z, z \geq x - 1, x \geq 0, z \geq 0\}$.

(4) 3. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3(x+y)}{x^2+(x+y)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Decida se g é diferenciável em $(0,0)$.

(4) 4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável e considere uma função $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\psi(u,v,w) = F(u - v^2, u^2 + v + w^2, w - u^2)$. Relacione o determinante da matriz jacobiana de ψ no ponto $(0,0,1)$, $\det J_\psi(0,0,1)$, com o determinante da matriz jacobiana de F, $\det J_F$, calculado num ponto apropriado.

(3) 5. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{x^2+y^2}(x+1)(y+1)$. Estude f quanto a existência e tipo de pontos de extremo local.

(2) 6. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $h(0) = 1$ e é nula numa vizinhança de 1. Mostre que a função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x,y) = \int_{x^2+y^2}^{xy+x+y+1} h(t)\, dt$$

possui um máximo local em $(0,0)$.

2º Teste

(3) 7. a) Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x = u + v + e^{uv} \\ y = u - v + \log(uv + 1) \end{cases}$$

define (u, v) como uma função $T \in C^1$ de (x, y) verificando $T(1, 0) = (0, 0)$ para (u, v) numa vizinhança suficientemente pequena de $(0, 0)$.

b) Considerando $(u, v) = T(x, y)$, calcule $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 0)$.

(3) 8. Calcule a área da superfície em $\mathbb{R}^3$ definida por $1 \leq x = \sqrt{y^2 + z^2} \leq 2$.

(4) 9. Seja $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x + y + z = 2\right\}$.

a) Justifique que M é uma variedade diferenciável e determine a sua dimensão.

b) Determine $T_M(1, 0, 1)$, o espaço tangente a M no ponto $(1, 0, 1)$.

c) Determine o ponto de M com maior coordenada z.

(3) 10. Calcule o volume da região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{1/4} \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2)^{1/2}, |y| \leq x\}.$$

(4) 11. a) Calcule

$$\int_L \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy$$

em que L é semicircunferência de centro em $(0, 0)$, contida no semiplano definido por $y \geq 0$, e unindo $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.

b) Decida se o integral da alínea anterior tem o mesmo valor qualquer que seja a linha L de classe C^1 unindo aqueles dois pontos no mesmo sentido e contida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(3) 12. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (y, -x, xyz)$ e considere a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right), 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2, x > 0, y > 0\right\}.$$

Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

em que ν designa a normal unitária contínua a S tal que $\nu \cdot (0, 0, 1) > 0$ nos pontos de S.