Cálculo Diferencial e Integral II
Época Especial

Versão T

13 de Julho de 2016

Justifique adequadamente todas as respostas.

(1,5) 1. Calcule o volume da região $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq (1-x)^3, 0 \leq z \leq (1-y)^3, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(2,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \frac{\log(x^2 + y^2 - 1)}{1 - e^{x/y}}$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e $\overline{D}$ e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

c) Decida se f é ou não uma função limitada.

d) Decida se f é ou não prolongável por continuidade a $(0, 2)$.

(2,0) 3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Determine em que pontos é que h é contínua.

b) Decida se h é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

(2,0) 4. Considere a função $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + xy + y^2) + y^4$.

a) Decida se $(0, 0)$ é ou não um ponto de extremo local de ψ. Se optar pela afirmativa classifique-o quanto a ser absoluto, relativo, máximo ou mínimo.

b) Determine o contradomínio de ψ.

(1,5) 5. Considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = F(x^2 - y^2, x^2 + y^2).$$

Exprima a derivada dirigida $D_{(1,-1)}G(1, 1)$ em termos de derivadas parciais de F adequadas.

(1,0) 6. Mostre que a função definida por $g(x) = \int_0^{1-x^2} \operatorname{sen}(t^2 x)\, dt$ é crescente numa vizinhança de 0.

(1,5) 7. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} e^{x+w} + y + \operatorname{sen} y - \cos(xz) = 0 \\ e^{y^2+2z} + x + \operatorname{sen}(xy) - \cos(wx) = 0 \end{cases}$$

define (x, y) como uma função C^1 de (z, w) numa vizinhança de $(0, 0, 0, 0)$ e calcule $\frac{\partial x}{\partial w}(0, 0)$.

(1,5) 8. Calcule o volume do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 - z^2\}.$$

(1,5) 9. Considere uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R})$ e uma linha L em $\mathbb{R}^2$ definida pela parametrização $r(t) = (e^t \operatorname{sen}(t\pi), t(1-t))$, $t \in [0,1]$, $L = r([0,1])$. Calcule

$$\int_L yh(xy)\, dx + xh(xy)\, dy.$$

(2,0) 10. Seja

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, \operatorname{sen}(\pi(x+y)) + e^z = 1\}.$$

a) Mostre que M é uma variedade diferencial e determine a sua dimensão.

b) Determine ou mostre que não existem o máximo e o mínimo de $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + x + y$ sobre M.

(1,5) 11. Sejam $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo definido por $H(x,y,z) = (y + 2x, 2y, xe^{x^2+y^2-1})$ e S a superfície definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, x + y + z = 1\}.$$

Determine o fluxo de $\operatorname{rot} H$ através de S no sentido da normal com terceira componente negativa.

(2,0) 12. Calcule o fluxo

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS$$

em que S é a fronteira do conjunto $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq x^2 + y^2 \geq z \geq 0\}$, ν a respectiva normal unitária exterior e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é definido por

$$F(x,y,z) = (x \cos z, -2y \cos z, z + \operatorname{sen} z).$$