Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste (Versão A)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

12 de Junho de 2017

Justifique adequadamente todas as respostas.

(3) 1. Considere a igualdade $\cos(x+y)+xy+x=1+2\pi$. Mostre que a igualdade define y como uma função de x, $y=h(x)$, para (x,y) numa vizinhança suficientemente pequena de $(2\pi,0)$, calcule $h'(2\pi)$ e aproveite para justificar que h é decrescente numa vizinhança de 2π.

(3) 2. Calcule a área da superfície em $\mathbb{R}^3$ definida por $x=y^2+z^2\leq 1$.

(4) 3. Seja $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, 0\leq y-x^2\leq \frac{1}{2}, 1\leq y+x^2\leq 2\right\}$. Use a mudança de coordenadas definida para $x>0$ por

$$\begin{cases} u=x^2+y \\ v=-x^2+y \end{cases}$$

para calcular

$$\iint_B xy\,dx\,dy.$$

(4) 4. Calcule

$$\iiint_U z\,dx\,dy\,dz$$

em que $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$.

(4) 5. a) Calcule

$$\int_L -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

em que L é o segmento de recta no plano unindo $(1,1)$ a $(2,2)$.

b) Justifique que o integral da alínea anterior tem o mesmo valor qualquer que seja a linha L de classe C^1 unindo aqueles dois pontos no mesmo sentido e contida no semiplano $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$.

(2) 6. Para $r>0$ define-se

$$g(r)=\iint_{\partial B_r(0,0,0)} F\cdot\nu\,dS$$

em que $F(x,y,z)=(x^2+e^{x^3+3xy^2},-2xy,z)$ e ν é a normal unitária exterior a $B_r(0,0,0)$. Calcule, ou mostre que não existe, $\lim_{r\to+\infty} g(r)$.