

## Cálculo Diferencial e Integral II

### 1.º Teste (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

24 de Abril de 2021

*Justifique adequadamente todas as respostas.*

- (4,0) 1. a) Calcule a massa de um sólido de densidade  $1 + z$  ocupando a região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq (1 - y)^2, 0 \leq y \leq 1 - |x|\}.$$

- b) Justifique que se pode inverter a ordem de integração para calcular

$$\int_1^2 \left( \int_t^2 \frac{e^{t/x}}{x^3} dx \right) dt$$

e obtenha o valor do integral.

- (2,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  por

$$f(x, y) = \frac{\log(1 - x^2 y^2)}{y\sqrt{x}}$$

- a) Determine o domínio  $D$  de  $f$ .

- b) Determine  $\text{int } D$ ,  $\partial D$  e  $\overline{D}$  e decida se  $D$  é aberto, fechado, conexo ou limitado.

- (4,0) 3. Considere a função  $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } |x| \geq y^2, \\ \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } |x| < y^2. \end{cases}$$

- a) Decida em que pontos é que  $h$  é contínua.

- b) Decida se  $h$  é prolongável por continuidade a  $(0, 0)$ .

- (4,0) 4. Considere funções  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$  e  $G$  definida por

$$G(x, y) = F(y \log x, x \log y).$$

Calcule, em termos de derivadas parciais adequadas de  $F$ :

- a)  $\nabla G(1, 1)$ .

- b)  $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(1, 1)$ .

- (4,0) 5. Seja  $g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = \frac{2}{1-x^2} - x^2 + xy + y^2 + x^2 y^2$ .

Decida se  $(0, 0)$  é um ponto de máximo local, um ponto de mínimo local, ou um ponto de sela de  $g$ .

- (2,0) 6. Mostre que, dada uma função  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e que toma tanto valores positivos como valores negativos, existem  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$  tais que

$$\int_{B_r(0,0)} \varphi(u + x, v + y) du dv = 0.$$